Inhaltsverzeichnis

1 Basiswissen und Grundrechenarten ........................................ 1
   1.1 Arten von Zahlen .................................................. 1
   1.2 Grundrechenarten .................................................. 2
      1.2.1 Addition ................................................... 2
      1.2.2 Subtraktion .................................................. 2
      1.2.3 Multiplikation ................................................. 3
      1.2.4 Division ..................................................... 3
   1.3 Reihenfolge der Operationen ........................................... 4
      1.3.1 Subtraktion von Klammern ..................................... 5
      1.3.2 Ein- und Ausklammern ......................................... 5
      1.3.3 Binomische Formeln ............................................. 6
   1.4 Besondere Operatoren ................................................ 7
      1.4.1 Summenzeichen ............................................... 7
      1.4.2 Doppelsummen ............................................... 9
      1.4.3 Produktzeichen .............................................. 10
   1.5 Fakultät ............................................................ 10
   1.6 Bruchrechnen ....................................................... 11
   1.7 Potenzrechnen ...................................................... 13
   1.8 Logarithmen ........................................................ 14
   1.9 Minimumfunktion ................................................... 16
   1.10 Interpolation ....................................................... 17
   1.11 Aufgaben und Lösungen ............................................. 18

2 Finanzmathematik .......................................................... 22
   2.1 Zins ................................................................. 22
   2.2 Festgeld mit jährlichen Zinsraten ................................ 23
   2.3 Festgeld mit periodischen Zinsraten ................................ 25
   2.4 Effektiver Zinssatz ................................................ 27
   2.5 Festgeld und Anlagedauer ........................................... 28
   2.6 Gesamtarbeitswert ................................................ 29
   2.7 Annuitäten .......................................................... 30
   2.8 Entscheidungshilfe Annuitäten .................................... 32
   2.9 Veränderungsraten und -faktoren .................................. 33
   2.10 Aufgaben und Lösungen ............................................ 35

3 Gleichungen ............................................................... 41
   3.1 Typen von Gleichungen .............................................. 43
      3.1.1 Identitätsgleichungen ......................................... 43
INHALTSVERZEICHNIS

3.1.2 Bestimmungsgleichungen ..................................... 43
3.1.3 Definitionsgleichungen ....................................... 44
3.1.4 Lineare Gleichung .......................................... 44
3.1.5 Quadratische Gleichung ...................................... 45
3.1.6 Wurzelgleichung ........................................... 45
3.2 Gleichungen lösen ................................................ 46
3.3 Gleichungssysteme ............................................... 47
   3.3.1 Einsetzverfahren ......................................... 48
   3.3.2 Additionsverfahren ...................................... 49
   3.3.3 Gleichsetzungsverfahren .................................. 50
3.4 Aufgaben und Lösungen ......................................... 51

4 Funktionen .......................................................... 57
   4.1 Beispielhafte Funktionen ..................................... 58
      4.1.1 Funktionen entwickeln .................................. 58
      4.1.2 Lineare Funktionen .................................... 59
      4.1.3 Quadratische Funktionen ................................ 61
      4.1.4 Funktionen höherer Ordnung ......................... 62
      4.1.5 Gebrochen-rationale Funktion ....................... 63
      4.1.6 Wurzelfunktionen ...................................... 64
      4.1.7 Exponentialfunktion ................................... 65
      4.1.8 Logarithmusfunktion .................................. 65
   4.2 Hilfestellung Koordinatenkreuz ................................ 66
   4.3 Aufgaben und Lösungen ..................................... 68

5 Differentialrechnung ............................................... 69
   5.1 Ableitungsregeln ............................................. 71
      5.1.1 Ableitungen mit Konstanten .......................... 72
      5.1.2 Ableitungen von Summen ............................... 72
      5.1.3 Ableitungen höherer Ordnung ....................... 73
   5.2 Komplexe Ableitungen ....................................... 74
      5.2.1 Produktregel ........................................... 74
      5.2.2 Quotientenregel ....................................... 75
      5.2.3 Kettenregel ........................................... 76
   5.3 Extremwerte .................................................... 77
   5.4 Aufgaben und Lösungen ..................................... 80

6 Betriebswirtschaftliche Anwendungen ............................. 86
   6.1 Nachfrage ..................................................... 86
   6.2 Umsatzfunktion ............................................... 89
   6.3 Kostenfunktionen ............................................ 91
   6.4 Gewinnfunktion ............................................... 94
      6.4.1 Break-even-Punkte .................................... 94
      6.4.2 Gewinnmaximierung ................................... 95
   6.5 Homogenität .................................................. 98
   6.6 Elastizität ................................................... 99
   6.7 Aufgaben und Lösungen .................................... 101

7 Volkswirtschaftliche Anwendungen ............................... 109
   7.1 Marktwirtschaft, Wohlfahrt und Staatsmächte .............. 109
## INHALTSVERZEICHNIS

<table>
<thead>
<tr>
<th>Kapitel</th>
<th>Titel</th>
<th>Seitennummer</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>7.2</td>
<td>Steuern, Subventionen und Transfers</td>
<td>116</td>
</tr>
<tr>
<td>7.3</td>
<td>Individuen und der Markt</td>
<td>123</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>Bivariate Funktionen</td>
<td>130</td>
</tr>
<tr>
<td>8.1</td>
<td>Ableitungsregeln</td>
<td>130</td>
</tr>
<tr>
<td>8.2</td>
<td>Extremwerte bivariater Funktionen</td>
<td>133</td>
</tr>
<tr>
<td>8.3</td>
<td>Optimierung unter Nebenbedingung</td>
<td>136</td>
</tr>
<tr>
<td>8.3.1</td>
<td>Lagrange-Multiplikator</td>
<td>140</td>
</tr>
<tr>
<td>8.3.2</td>
<td>Weitere Anwendungen des Lagrange-Verfahrens</td>
<td>141</td>
</tr>
<tr>
<td>8.4</td>
<td>Aufgaben und Lösungen</td>
<td>145</td>
</tr>
<tr>
<td>9</td>
<td>Grundlagen der Statistik</td>
<td>159</td>
</tr>
<tr>
<td>9.1</td>
<td>Gegenstand der Statistik</td>
<td>159</td>
</tr>
<tr>
<td>9.2</td>
<td>Arten von Statistik</td>
<td>160</td>
</tr>
<tr>
<td>9.2.1</td>
<td>deskriptive Statistik</td>
<td>160</td>
</tr>
<tr>
<td>9.2.2</td>
<td>Induktive Statistik</td>
<td>160</td>
</tr>
<tr>
<td>9.3</td>
<td>Statistik in den Wirtschaftswissenschaften</td>
<td>160</td>
</tr>
<tr>
<td>9.4</td>
<td>Täuschen mit Statistik</td>
<td>161</td>
</tr>
<tr>
<td>9.4.1</td>
<td>Prozentwerte</td>
<td>162</td>
</tr>
<tr>
<td>9.4.2</td>
<td>Darstellung</td>
<td>163</td>
</tr>
<tr>
<td>9.4.3</td>
<td>Ungleichmäßige Verteilungen</td>
<td>165</td>
</tr>
<tr>
<td>9.4.4</td>
<td>Trends</td>
<td>166</td>
</tr>
<tr>
<td>9.5</td>
<td>Grundbegriffe</td>
<td>167</td>
</tr>
<tr>
<td>9.5.1</td>
<td>Skalierung</td>
<td>169</td>
</tr>
<tr>
<td>10</td>
<td>Datengewinnung</td>
<td>172</td>
</tr>
<tr>
<td>10.1</td>
<td>Primär- und Sekundärdaten</td>
<td>172</td>
</tr>
<tr>
<td>10.2</td>
<td>Sekundärdatenquellen</td>
<td>173</td>
</tr>
<tr>
<td>10.3</td>
<td>Primärdatenquellen</td>
<td>175</td>
</tr>
<tr>
<td>10.3.1</td>
<td>Mündliche Befragung</td>
<td>175</td>
</tr>
<tr>
<td>10.3.2</td>
<td>Telefonische Befragung</td>
<td>176</td>
</tr>
<tr>
<td>10.3.3</td>
<td>Schriftliche Befragung</td>
<td>176</td>
</tr>
<tr>
<td>10.3.4</td>
<td>Internetbefragung</td>
<td>177</td>
</tr>
<tr>
<td>10.3.5</td>
<td>Messung und Beobachtung</td>
<td>177</td>
</tr>
<tr>
<td>10.3.6</td>
<td>Experimente</td>
<td>178</td>
</tr>
<tr>
<td>10.4</td>
<td>Ausrichtung der Daten</td>
<td>178</td>
</tr>
<tr>
<td>11</td>
<td>Häufigkeiten und Klassen</td>
<td>180</td>
</tr>
<tr>
<td>11.1</td>
<td>Klassenbildung</td>
<td>180</td>
</tr>
<tr>
<td>11.2</td>
<td>Häufigkeitsverteilung</td>
<td>183</td>
</tr>
<tr>
<td>11.3</td>
<td>Klassenparameter</td>
<td>185</td>
</tr>
<tr>
<td>11.4</td>
<td>Aufgaben und Lösungen</td>
<td>187</td>
</tr>
<tr>
<td>12</td>
<td>Lageparameter</td>
<td>190</td>
</tr>
<tr>
<td>12.1</td>
<td>arithmetisches Mittel</td>
<td>191</td>
</tr>
<tr>
<td>12.2</td>
<td>geometrisches Mittel</td>
<td>193</td>
</tr>
<tr>
<td>12.3</td>
<td>harmonisches Mittel</td>
<td>196</td>
</tr>
<tr>
<td>12.4</td>
<td>Gewichtete Mittelwerte</td>
<td>198</td>
</tr>
<tr>
<td>12.5</td>
<td>Gleitender Mittelwert</td>
<td>200</td>
</tr>
<tr>
<td>12.6</td>
<td>Winsorisierung</td>
<td>203</td>
</tr>
</tbody>
</table>
INHALTSVERZEICHNIS

12.7 Median ............................................. 205
12.8 Perzentile ........................................... 206
12.9 Besondere Perzentile ............................. 208
12.10 Modus ............................................. 210
12.11 Excel-Übung ...................................... 212
   12.11.1 Arithmetisches Mittel .................. 212
   12.11.2 Geometrisches Mittel .................. 213
   12.11.3 Harmonisches Mittel .................. 213
   12.11.4 Gewichtete Mittelwerte ............... 214
   12.11.5 Gleitender Mittelwert ................. 215
   12.11.6 Winsorisierung ......................... 216
   12.11.7 Median .................................. 216
   12.11.8 Perzentile ................................ 218
12.12 Aufgaben und Lösungen ......................... 218
   12.12.1 Geometrisches Mittel .................. 218
   12.12.2 Harmonisches Mittel .................. 220
   12.12.3 Gewichtete Mittelwerte ............... 221
   12.12.4 Gleitender Mittelwert ................. 222
   12.12.5 Winsorisierung ......................... 223
   12.12.6 Median .................................. 224
   12.12.7 Perzentile ................................ 225
   12.12.8 Besondere Perzentile .................. 225

13 Streuungsmaße ...................................... 228
   13.1 Spannweite ................................... 228
   13.2 Perzentile ................................... 228
   13.3 Varianz und Standardabweichung .......... 228
   13.4 Variationskoeffizient ...................... 233
   13.5 Standardisierung ............................ 234
   13.6 Excel-Übung .................................. 235
   13.7 Aufgaben und Lösungen ....................... 238
      13.7.1 Varianz und Standardabweichung ...... 238
      13.7.2 Variationskoeffizient .................. 238
      13.7.3 Standardisierung ....................... 239

14 Zentrale Momente .................................... 241
   14.1 Schiefe ......................................... 241
   14.2 Kurtosis ....................................... 244
   14.3 Excel-Übung .................................. 246
   14.4 Aufgaben und Lösungen ....................... 247

15 Konzentration ....................................... 248
   15.1 Konzentrationsindizes ....................... 249
   15.2 Lorenzkurve .................................... 251
   15.3 Gini-Koeffizient ............................. 255
   15.4 Atkinson-Maß .................................. 256
   15.5 Hoover-Ungleichheitsverteilung .......... 257
   15.6 Excel-Übung .................................. 259
   15.7 Aufgaben und Lösungen ....................... 260
      15.7.1 Konzentrationsmaße ..................... 260
## Inhaltsverzeichnis

<table>
<thead>
<tr>
<th>Kapitel</th>
<th>Seite</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>15.7.2</td>
<td>Lorenzkurve</td>
</tr>
<tr>
<td>15.7.3</td>
<td>Gini-Koeffizient</td>
</tr>
<tr>
<td>15.7.4</td>
<td>Hoover-Ungleichheitsverteilung</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>16 Indizes</strong></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>16.1</td>
<td>Gliederungszahlen</td>
</tr>
<tr>
<td>16.2</td>
<td>Beziehungszahlen</td>
</tr>
<tr>
<td>16.3</td>
<td>Indexzahlen</td>
</tr>
<tr>
<td>16.4</td>
<td>Indextransformation</td>
</tr>
<tr>
<td>16.4.1</td>
<td>Umbasierung</td>
</tr>
<tr>
<td>16.4.2</td>
<td>Verkettung</td>
</tr>
<tr>
<td>16.4.3</td>
<td>Verknüpfung</td>
</tr>
<tr>
<td>16.5</td>
<td>Excel-Übung</td>
</tr>
<tr>
<td>16.6</td>
<td>Aufgaben und Lösungen</td>
</tr>
<tr>
<td>16.6.1</td>
<td>Indexberechnung</td>
</tr>
<tr>
<td>16.6.2</td>
<td>Indextransformation</td>
</tr>
<tr>
<td>16.6.3</td>
<td>Verknüpfung</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>17 Wahrscheinlichkeitsrechnung</strong></td>
<td>286</td>
</tr>
<tr>
<td>17.1</td>
<td>Mengenlehre</td>
</tr>
<tr>
<td>17.2</td>
<td>Ereignisalgebra</td>
</tr>
<tr>
<td>17.3</td>
<td>Wahrscheinlichkeitsbegriffe</td>
</tr>
<tr>
<td>17.3.1</td>
<td>Klassische Definition</td>
</tr>
<tr>
<td>17.3.2</td>
<td>Empirische Definition</td>
</tr>
<tr>
<td>17.3.3</td>
<td>Subjektive Definition</td>
</tr>
<tr>
<td>17.4</td>
<td>Wahrscheinlichkeitsregeln</td>
</tr>
<tr>
<td>17.5</td>
<td>Aufgaben und Lösungen</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>18 Wahrscheinlichkeitsverteilung</strong></td>
<td>308</td>
</tr>
<tr>
<td>18.1</td>
<td>Allgemeines</td>
</tr>
<tr>
<td>18.2</td>
<td>Binomialverteilung</td>
</tr>
<tr>
<td>18.3</td>
<td>Poisson-Verteilung</td>
</tr>
<tr>
<td>18.4</td>
<td>Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen</td>
</tr>
<tr>
<td>18.5</td>
<td>Normalverteilung</td>
</tr>
<tr>
<td>18.6</td>
<td>Aufgaben und Lösungen</td>
</tr>
<tr>
<td>18.6.1</td>
<td>Binomialverteilung</td>
</tr>
<tr>
<td>18.6.2</td>
<td>Poisson-Verteilung</td>
</tr>
<tr>
<td>18.6.3</td>
<td>Normalverteilung</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>19 Schätztheorie</strong></td>
<td>321</td>
</tr>
<tr>
<td>19.1</td>
<td>Einführende Definitionen</td>
</tr>
<tr>
<td>19.2</td>
<td>Schätztheorie</td>
</tr>
<tr>
<td>19.3</td>
<td>Schätzung von Anteilen</td>
</tr>
<tr>
<td>19.4</td>
<td>Notwendiger Stichprobenumfang</td>
</tr>
<tr>
<td>19.5</td>
<td>Aufgaben und Lösungen</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>Appendix</strong></td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>
Kapitel 1

Basiswissen und Grundrechenarten

Viele der Konzepte dieses Kapitels werden Ihnen bekannt vorkommen. Sie werden in pragmatischer Weise und zur Hinführung auf die vertiefenden Berechnungen vorgestellt.

1.1 Arten von Zahlen


Die folgende Liste gibt die wichtigsten Zahlenarten zusammen mit einer Beschreibung, Beispielen und ihren mathematischen Bezeichnern wieder:

- **Natürliche Zahlen**: \( \mathbb{N} \)
  
  Alle ganzen positiven Zahlen ohne Null: 1, 2, 3, 4 ···
Um Null einzubeziehen, ist der Bezeichner ausdrücklich zu erweitern zu $\mathbb{N}_0$.

- **Ganze Zahlen:** $\mathbb{Z}$
  Alle positiven und negativen Zahlen einschließlich Null: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$

- **Rationale Zahlen:** $\mathbb{Q}$
  Zahlen, die durch Brüche ganzer Zahlen entstehen: $\frac{2}{3}, \frac{-4}{5}, \frac{7}{2}$

- **Reelle Zahlen:** $\mathbb{R}$

### 1.2 Grundrechenarten

Die vier elementarsten Rechenkonzepte werden in der Mathematik als Grundrechenarten bezeichnet. Dabei handelt es sich um die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division.

#### 1.2.1 Addition


**Beispiel 1.1 Addition**

\[
\begin{align*}
1 + 2 &= 3 \\
5 + 7 &= 12 \\
1 + 2 + 3 &= 6
\end{align*}
\]

(c) Rombach Verlag

Das Beispiel zeigt, dass eine Addition auch mit mehr als nur zwei Summanden durchgeführt werden kann.

#### 1.2.2 Subtraktion

Als logisches Gegenstück zur Addition findet bei der Subtraktion auf dem Zahlenstrahl eine Bewegung nach links statt, weil eine Zahl um eine andere Zahl gemindert wird. Das obige Beispiel zeigt, dass bei der Addition die Reihenfolge der Zahlen keine Rolle spielt. Bei der Subtraktion hingegen wird unterschieden zwischen dem Ausgangspunkt auf dem Zahlenstrahl, der als Minuend bezeichnet wird, und der durchzuführenden Linksverschiebung auf dem Zahlenstrahl, die als Subtrahend bezeichnet wird. Minuend und Subtrahend werden durch den
1.2. GRUNDRECHENARTEN

Operator – getrennt, wobei der Minuend immer links vom Subtrahend angeordnet werden muss. Das Ergebnis der Subtraktion wird als Differenz bezeichnet und im folgenden Zahlenbeispiel veranschaulicht.

Beispiel 1.2 Subtraktion

\[
\begin{align*}
1 - 2 &= -1 \\
2 - 1 &= 1 \\
1 - 2 - 3 &= -4
\end{align*}
\]

Auch Subtraktionen können mehrfach durchgeführt werden.

1.2.3 Multiplikation


Beispiel 1.3 Multiplikation

\[
\begin{align*}
1 \cdot 2 &= 2 \\
1 \cdot -2 &= -2 \\
-1 \cdot -2 &= 2 \\
1 \cdot 2 \cdot 3 &= 6
\end{align*}
\]


1.2.4 Division

Als Gegenoperation zur Multiplikation wird bei der Division ein bestehender Abstand auf dem Zahlenstrahl zur Null verkleinert. Wie bei der Subtraktion muss zwischen den betroffenen Größen unterschieden werden. Divisionen können entweder durch den mathematischen Operator \(/\) gekennzeichnet oder in Form eines Bruchs dargestellt werden. Bei der erstgenannten Schreibweise wird die zu

\[
a : b = \frac{a}{b} \tag{1.11}
\]

**Beispiel 1.4 Division**

\[
\frac{1}{2} = 0,5 \tag{1.12}
\]

\[
\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = -0,5 \tag{1.13}
\]

Die zweite Beispielrechnung stellt dar, dass die Positionierung des Minuszeichens vor, auf oder unter einem Bruch unerheblich ist. Ein zweites oder drittes Minuszeichen würde selbstverständlich den Wert des Bruchs verändern.

### 1.3 Reihenfolge der Operationen

In den Beispielen zu den Grundrechenarten wurden auch Operationen mit mehr als zwei Zahlen dargestellt. Kommen mehrere Operationen innerhalb einer Rechnung vor, so ist eine Reihenfolge zu definieren, nach der diese Operationen durchgeführt werden müssen. Ergänzend ist festzulegen, wie eine grundsätzlich festgelegte Reihenfolge durch weitere Operatoren (Klammersetzung) beeinflusst werden kann.

Grundsätzlich sind Berechnungen von links nach rechts durchzuführen. Werden in einer Berechnung mehrere unterschiedliche Operatoren aufgeführt, so haben die Punktoperationen (Multiplikation und Division) Vorrang vor den Strichoperationen (Addition und Subtraktion). Es gilt also der Merksatz: Punkt vor Strich.


**Beispiel 1.5 Klammern 1**

\[
1 + 2 \cdot 3 = 7 \tag{1.14}
\]

\[
(1 + 2) \cdot 3 = 9 \tag{1.15}
\]
Durch Einfügen der Klammer ändert sich der Funktionswert von 7 auf 9, weil die Addition der beiden Zahlen 1 und 2 nun Vorrang vor der Multiplikation mit der Zahl 3 genießt.

Beispiel 1.6 Klammern 2

\[(1 + 2) \cdot (4 + 5) = (9) \cdot (9) = 81\]  \hspace{1cm} (1.16)
\[[1 + 2] \cdot (4 + 5) = \quad 81\]  \hspace{1cm} (1.17)


1.3.1 Subtraktion von Klammern

Minuszeichen vor Klammern kommen entweder vor, wenn Klammern vom Ergebnis einer anderen Berechnung oder einem anderen Wert abgezogen werden sollen oder wenn der Wert der Klammer mit \((-1)\) multipliziert und damit im Nullpunkt auf die andere Seite des Zahlenstrahls gespiegelt werden soll. Die Interpretation des Minus vor der Klammer ist identisch zwischen der Multiplikation jedes Klammerbestandteils mit \((-1)\) und der Multiplikation des Wertes der Klammer mit ebendiesem \((-1)\). Das folgende Beispiel veranschaulicht die beiden alternativen Berechnungen.

Beispiel 1.7 Subtraktion von Klammern

\[-(1 + 4 - 3) = (-1 - 4 + 3) = -2\] \hspace{1cm} (1.18)

1.3.2 Ein- und Ausklammern

Abgesehen von der Ergebnisorientierung der bisherigen Berechnungen, sind Klammern aber auch ein sinnvolles Instrument, um Zusammenfassungen oder Zwischenschritte im Umgang mit Gleichungen oder Linearen Gleichungssystemen zu erzeugen.

Beispiel 1.8 Ein- und Ausklammern

\[4 \cdot (1x + 2y + 3z) = \quad 4x + 8y + 12z\] \hspace{1cm} (1.19)
\[(20x + 10y) = \quad 10 \cdot (2x + y)\] \hspace{1cm} (1.20)

Die erste Gleichung zeigt, wie durch Einklammern eine Klammer aufgelöst wird. In der zweiten Gleichung wird der Inhalt der Klammer durch Ausklammern vereinfacht. Sind die dargestellten Klammern nur Teil einer größeren Rechnung, so zeigen die folgenden Rechnungen den Vorteil der durchgeführten Operationen auf: